CONVERGENCE THEOREMS FOR RESOLVENTS OF MAXIMAL MONOTONE OPERATORS (Mathematical Science of Optimization)

大沢, 繁夫; 高橋, 渉

数理解析研究所講究録
1174 巻 2000 年 205-216

CONVERGENCE THEOREMS FOR RESOLVENTS OF MAXIMAL MONOTONE OPERATORS

Shigeo Ohsawa (大沢繁夫), Wataru Takahashi (高橋 渉)
Department of Mathematical and Computing Sciences,
Tokyo Institute of Technology
(東京工業大学大学院 情報理工学研究科)

1 はじめに

近年，数学，物理学，工学，オペレーションズ・リサーチ，数理経済学などの分野で扱われる非線形問題の研究が盛んになるにつれ，凸集合や凸関数といった凸に関する言葉を耳にすることが多くなってきている．凸の概念は線形と非線形の中間に位置するものであり，凸集合や凸関数などの凸性をもったものの性質ならびにその周辺を研究する分野が凸解析学である．

一方，不動点の存在を仮定し，あるプロセスを経てその不動点を求める方法を不動点近似法という．その近似法は非線形問題の解を求める近似法に刺激され進歩してきている．凸解析学と不動点近似法は，数学の中で比較的若い分野ではあるが，コンピュータの急速な進歩とともに，種々の非線形問題の研究と関連しながら，その必要性を増してきている．本研究では，Banach 空間を視野にいれながら Hilbert 空間における maximal monotone operator の resolvent の収束定理と凸最小化問題の解の近似法を考える．

E を実 Banach 空間とし，f を E から $(-\infty,+\infty]$ に値をとる proper で凸な下半連続関数とする．このとき，

$$\min\{f(x) : x \in E\} \tag{1}$$

という凸最小化問題を考える．このような f に対して E 上の集合値写像 $\partial f \subset E \times E^*$ を $x \in E$ に対して，

$$\partial f(x) = \{x^* \in E^* : f(y) \geq f(x) + \langle x^*, y - x\rangle,\ y \in E\}$$

で定義し，これを f の劣微分と呼ぶ．v が ∂f のゼロ点，つまり $\partial f(v) \ni 0$ を満たすならば v が f の最小値を与えることが分かる．

E 上の集合値写像 $A \subset E \times E^*$ が，任意の $(x, x^*), (y, y^*) \in A$ に対して

$$\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$$

を満たすならば monotone であると言う．さらに, monotone 写像 A が maximal であるとは A が直積空間 $E \times E^*$ の monotone 集合として極大であるとき，つまり $B \subset E \times E^*$ が monotone 写像で $A \subset B$ ならば $A = B$ であることをいう．proper で凸な下半連続関数 $f : E \to (-\infty, +\infty]$ に対して，その劣微分 ∂f は maximal monotone 写像になることが知られている [24]．

E の元 x に対して,

$$J(x) = \{x^* \in E^* : \langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}$$

が定義されるが，この J を E 上の duality 写像という．$\partial(\frac{1}{2}\|\cdot\|^2)(x) = J(x)$ であり，E が Hilbert 空間であれば $J = I$ (恒等写像) である [24].

$A \subset E \times E$ とする．A が増大作用素であるとは，任意の $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ に対してつねに $\langle y_1 - y_2, j \rangle \geq 0$ となる $j \in J(x_1 - x_2)$ が存在するときをいう．さらに，$A \subset E \times E$ が m- 増大作用素であるとは，A が増大作用素であって任意の $r > 0$ に対して $R(I + rA) = E$ が成り立つことをいう．特に，E が Hilbert 空間であれば $A \subset E \times E^*$ が maximal monotone 写像であることと m- 増大作用素であることは同値であり，もちろん，∂f も m- 増大作用素になる．A が m- 増大作用素であるならば，$r > 0$ に対して，A の resolvent が

$$J_r = (I + rA)^{-1}$$

で定義される．

(1) の解を求めるよく知られた方法として，Martinet [10] によって導入された proximal point algorithm というものがある．このアルゴリズムは，resolvent J_r に関係がある．すなわち，H を Hilbert 空間とするとき，

$$J_r x = \operatorname{argmin}\left\{f(z) + \frac{1}{2r}\|z - x\|^2 : z \in H\right\}$$

である (Moreau [11] を参照せよ).

proximal point algorithm とは，$\{r_n\} \subset (0, \infty)$ とするとき，$x_0 \in H$ を初期点とし，

$$x_{n+1} = J_{r_n} x_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

で帰納的に点列 $\{x_n\}$ を生成し，(1) の解を求める点列的構成法のことである (Rockafellar [14] を参照せよ).

一方，我々は，非拡大写像 T の 2 つの不動点近似法を知っている．E を Banach 空間とし，T を E から E への非拡大写像とする．一つは Halpern [4] によって導入された点列的近似法

$$x_0 = x \in H,\ x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n)Tx_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

と，あとは Mann [9] によって導入された

$$x_0 = x \in H,\ x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n)Tx_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

の近似法である．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ である．詳しくは [24] を参照.

ここでは，Halpern と Mann によって導入された点列的不動点近似法のアイデアを用いて，resolvent の収束定理と (1) の解を求める点列的構成法を議論するのが一つの目的である．Halpern による構成法では強収束のかたちで収束定理が得られ，Mann による構成法を用いると，弱収束のかたちで収束定理が得られる．第 4 節では今後の問題が 4 つあげられている．

2 準備

E を Banach 空間とし，E^* をその共役空間とする．$x \in E$ における $x^* \in E^*$ の値を $\langle x, x^* \rangle$ で表す.

E の凸性の modulus δ は，$0 \le \varepsilon \le 2$ となる ε に対して，

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x+y\|}{2} : \|x\| \le 1, \|y\| \le 1, \|x-y\| \ge \varepsilon\right\}$$

で定義される．Banach 空間 E が一様凸であるとは $\varepsilon > 0$ に対して $\delta(\varepsilon) > 0$ がつねに成り立つときをいう．$U = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ としよう．このとき，$x, y \in U$ に対して極限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x+ty\| - \|x\|}{t} \tag{2}$$

を考える．E のノルムが Gâteaux 微分可能であるとは，任意の $x, y \in U$ に対して，(2) がつねに存在するときをいう．E のノルムが一様に Gâteaux 微分可能であるとは，任意の $y \in U$ に対して，(2) が $x \in U$ に関して一様に収束するときをいう．E のノルムが Fréchet 微分可能であるとは，任意の $x \in U$ に対して，(2) が $y \in U$ に関して一様に収束するときをいう．E が Gâteaux 微分可能なノルムを持てば，E 上の duality 写像は一価写像になる．E が一様に滑らかであるとは (2) が U の元 x, y に関して一様に収束することをいう.

補助定理 2.1 $x, y \in E$ とする．このとき，次の (1) と (2) は同値である．
(1) すべての $r \geq 0$ に対して，$\|x\| \leq \|x + ry\|$ である；
(2) $\langle y, f \rangle \geq 0$ となる $f \in J(x)$ が存在する．

この補助定理を用いて，増大作用素の特徴づけを行うことができる．

定理 2.2 次の条件 (1) と (2) は同値である．
(1) $A \subset E \times E$ は増大作用素である；
(2) すべての $r \geq 0$ と $(x_i, y_i) \in A$ $(i = 1, 2)$ に対して，つねに

$$\|x_1 - x_2 + r(y_1 - y_2)\| \geq \|x_1 - x_2\|$$

が成り立つ．

$A \subset E \times E$ を増大作用素とする．このとき，A の resolvent J_r はすべての $r > 0$ に対して，

$$J_r x = \{z \in E : z + rAz \ni x\} \tag{3}$$

で定義されるが，この J_r は一価写像である ([24] を参照)．(3) からもわかるように，

$$J_r = (I + rA)^{-1} \quad (r > 0)$$

である．この J_r $(r > 0)$ から，A の吉田近似といわれる

$$A_r = \frac{1}{r}(I - J_r) \quad (r > 0)$$

も定義できるが，J_r, A_r については次の性質が成り立つ．

定理 2.3 (J_r, A_r の基本的性質) $A \subset E \times E$ を増大作用素とし，$r > 0$ とする．このとき，次の (i), (ii), (iii), (iv) が成り立つ．
(i) $\|J_r x - J_r y\| \leq \|x - y\| \quad (\forall x, y \in R(I + rA))$；
(ii) A_r は一価の増大作用素であり，かつ

$$\|A_r x - A_r y\| \leq \frac{2}{r}\|x - y\| \quad (\forall x, y \in R(I + rA));$$

(iii) $(J_r x, A_r x) \in A \quad (\forall x \in R(I + rA))$；
(iv) $\|A_r x\| \leq |Ax| \quad (\forall x \in D(A) \cap R(I + rA))$ である．ただし，$|Ax| = \inf\{\|z\| : z \in Ax\}$ である．

E を Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を増大作用素とする．このとき，すべての $r > 0$ に対して，

$$\overline{D(A)} \subset R(I + rA)$$

が成立するならば，A は値域条件 (range condition) を満たすといわれる．

このとき，$A^{-1}0 = \{x \in D(A) : 0 \in Ax\}$ と A の resolvent J_r の不動点の集合の間には次の関係がある．

補助定理 2.4 E を Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を増大作用素とする．このとき，すべての $r > 0$ にたいして，

$$F(J_r) = A^{-1}0$$

である．

これを用いて次の補助定理を証明することができる．

補助定理 2.5 E を Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．このとき，$x \in \bigcap_{r>0} R(I + rA)$ に対して，次の (i), (ii) が成立する．
(i) $t_n \to \infty$, $y = \lim_{n\to\infty} J_{t_n}x$ となる $\{t_n\}$ が存在すれば，$y \in A^{-1}0$ である．
(ii) E が一様凸であり，$t_n \to \infty$, $s_n \to \infty$, $y = \lim_{n\to\infty} J_{t_n}x$, $y = \lim_{n\to\infty} J_{s_n}x$ となる $\{t_n\}, \{s_n\}$ が存在すれば，$y = z$ となる．

次の定理は，Halpern タイプの強収束定理を証明するときに有用である．

定理 2.6 ($r \to \infty$ のときの $J_r x$ の収束性) E を一様 Gâteaux 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．C を E の空でない閉凸集合で，

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I + rA)$$

を満たすものとする．このとき，$0 \in R(A)$ ならば，任意の $x \in C$ に対して $\lim_{r\to\infty} J_r x$ が存在して，その極限は $A^{-1}0$ に属する．

次に $r \to \infty$ のときの $J_r x$ の収束先について，少々考察を加える．

E を Banach 空間とし，C, D を部分集合とする．$P : C \to D$ が sunny であるとは，$x \in C$ に対して，$Px + t(x - Px) \in C$, $t \geq 0$ ならば，

$$P(Px + t(x - Px)) = Px$$

がつねに成り立つことである．

補助定理 2.7 E を一様凸な Banach 空間とし，C を E の凸集合とする．また $C_0 \subset C$ とし，P を C から C_0 の上への retraction とする．このとき，任意の $x \in C$ と $y \in C_0$ に対して，$\langle x - Px, J(Px - y)\rangle \geq 0$ がつねに成り立つならば，P は nonexpansive であり，かつ sunny である．

次の定理は Mann タイプの弱収束定理を証明するときに有用である．

定理 2.8 E を Fréchet 微分可能なノルムを持つ一様凸な Banach 空間とし，C を E の閉凸集合とする．$\{T_1, T_2, T_3, \cdots\}$ を C から C への非拡大写像の列とし，$\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$ を仮定する．$x \in C$ とし，$S_n = T_n T_{n-1} \cdots T_1$ $(n \in N)$ とする．このとき，集合

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{co}\{S_m x : m \geq n\} \cap U$$

は高々一点からなる．ただし $U = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ である．

3 Resolvent の収束定理

この節では，Halpern と Mann の不動点近似法のアイデアを用いて，resolvent の収束定理を証明する．次の定理は Halpern タイプの強収束定理である．

定理 3.1 [6] E を一様 Gatêaux 微分可能なノルムを持つ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．C を E の空でない閉凸集合で，

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I + rA)$$

を満たすものとする．$x_0 = x \in C$ とし，

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$，$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$，$\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に強収束する．ここで，$Px = u$ とおくと，P は C から $A^{-1}0$ の上への sunny nonexpansive retraction である．

定理2.8を用いて，次の Mann タイプの弱収束定理が証明できる．

定理 3.2 [6] E を Fréchet 微分可能なノルムをもつ一様凸な Banach 空間とし，$A \subset E \times E$ を値域条件を満たす増大作用素とする．C を E の空でない閉凸集合で，

$$\overline{D(A)} \subset C \subset \bigcap_{r>0} R(I+rA)$$

を満たすものとする．$x_0 = x \in C$ とし，

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$, $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ のある元 u に弱収束する．

定理 3.1 の直接的結果として，次の定理を得ることができる．

定理 3.3 E を Hilbert 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を maximal monotone 写像とする．$x_0 = x \in E$ とし，

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に強収束する．ここで，$Px = u$ とおくと，P は E から $A^{-1}0$ の上への距離射影である．

定理 3.2 の直接的結果として，次の定理を得ることができる．

定理 3.4 E を Hilbert 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を maximal monotone 写像とする．$x_0 = x \in E$ とし，

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) J_{r_n} x_n \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0,\infty)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$, $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすものとする．このとき，$A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束する．

定理 3.3 および 定理 3.4 を用いて，凸最小化問題の解を求める proximal point algorithm を議論することができる．

定理 3.5 E を Hilbert 空間とし，$f : E \to (-\infty, +\infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．$x_0 = x \in E$ とし，

$$y_n = \operatorname*{argmin}_{z \in H} \left\{ f(z) + \frac{1}{2r_n} \|z - x_n\|^2 \right\},$$

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) y_n \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ を満たすものとする．このとき，$(\partial f)^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，$\{x_n\}$ は $(\partial f)^{-1}0$ の元 u に強収束する．ここで，u は x に一番近い minimizer である．さらに，

$$f(x_{n+1}) - f(u) \leq \alpha_n (f(x) - f(u)) + \frac{1 - \alpha_n}{r_n} \|y_n - u\| \|y_n - x_n\|$$

が成り立つ．

定理 3.6 E を Hilbert 空間とし，$f : E \to (-\infty, +\infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．$x_0 = x \in E$ とし，

$$y_n = \operatorname*{argmin}_{z \in H} \left\{ f(z) + \frac{1}{2r_n} \|z - x_n\|^2 \right\},$$

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) y_n \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0,1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$, $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすものとする．このとき，$(\partial f)^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，$\{x_n\}$ は $(\partial f)^{-1}0$ の元 u に弱収束する．さらに，

$$f(x_{n+1}) - f(u) \leq \alpha_n (f(x_n) - f(u)) + \frac{1 - \alpha_n}{r_n} \|y_n - u\| \|y_n - x_n\|$$

が成り立つ．

4 問題

E を Banach 空間とし，E^* をその共役空間とする．これ以降，E と E^* に回帰的であることと狭義凸であることを仮定する．

まず始めに Banach 空間における maximal monotone 写像に対する resolvent の定義をする．$A \subset E \times E^*$ を maximal monotone 写像とする．このとき $x \in E$ と $r > 0$ に対して

$$J(x_r - x) + rAx_r \ni 0$$

を満たす x_r は一意に存在する．この x と r によって決まる x_r を $J_r x = x_r$ として J_r を A の resolvent という．J_r の不動点と A のゼロ点の間には

$$F(J_r) = A^{-1}0$$

の関係があり閉凸集合になる．J_r は一価であるが，E が Banach 空間である限り J_r が nonexpansive 写像になるかどうかは分からない．一方，$A \subset E \times E$ が増大作用素であるときの resolvent の定義

$$\hat{J}_r x = \{z \in E : z + rAz \ni x\}$$

においては $\hat{J}_r$ は一価になり nonexpansive 写像にもなる．さらに E が Hilbert 空間であれば $J_r = \hat{J}_r$ である．

我々は Kamimura-Takahashi によって初めて導入された 2 つの点列的近似法を maximal monotone 写像の resolvent の収束問題を解くことに応用したいのである．すなわち Halpern タイプの近似法

$$x_0 = x \in E, \;\; x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \; (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

と Mann タイプの近似法

$$x_0 = x \in E, \;\; x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \; (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

を考え，(1) の凸最小化問題の解をこれらの近似法によって解明したいのである．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$, $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ である．

問題 4.1 E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を maximal monotone 写像とする．$x_0 = x \in E$ とし，

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \; (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ を満たすものとする．このとき，$\{x_n\}$ が有界で，$A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に強収束するだろうか．

問題 4.2 E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を maximal monotone 写像とする．$x_0 = x \in E$ とし，

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) J_{r_n} x_n \; (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$, $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすものとする．このとき，$\{x_n\}$ が有界で，$A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，$\{x_n\}$ は $A^{-1}0$ の元 u に弱収束するだろうか．

問題 4.1 および 問題 4.2 を解く前に，次の 2 つの問題を解くことが先決かも知れない.

問題 4.3 E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし，$f : E \to (-\infty, +\infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．$x_0 = x \in E$ とし，

$$y_n = \operatorname*{argmin}_{z \in H} \left\{ f(z) + \frac{1}{2r_n} \|z - x_n\|^2 \right\},$$

$$x_{n+1} = \alpha_n x + (1 - \alpha_n) y_n \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とする．ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} r_n = \infty$ を満たすものとする．このとき，$\{x_n\}$ が有界で，$(\partial f)^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，$\{x_n\}$ は $(\partial f)^{-1}0$ の元 u に強収束するだろうか.

問題 4.4 E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし，$f : E \to (-\infty, +\infty]$ を proper で下半連続な凸関数とする．$x_0 = x \in E$ とし，

$$y_n = \operatorname*{argmin}_{z \in H} \left\{ f(z) + \frac{1}{2r_n} \|z - x_n\|^2 \right\},$$

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n) y_n \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

とする. ただし，$\{\alpha_n\} \subset [0, 1]$ と $\{r_n\} \subset (0, \infty)$ は $\limsup_{n\to\infty} \alpha_n < 1$, $\liminf_{n\to\infty} r_n > 0$ を満たすものとする．このとき，$\{x_n\}$ が有界で，$(\partial f)^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，$\{x_n\}$ は $(\partial f)^{-1}0$ の元 u に弱収束するだろうか.

我々は次の定理を知っている.

定理 4.5 [7] E を一様凸で一様に滑らかな Banach 空間とし，$A \subset E \times E^*$ を maximal monotone 写像とする．このとき，$A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるならば，任意の $x \in E$ にたいして $J_r x$ は $A^{-1}0$ の元 u に $r \to \infty$ のとき強収束する．ここで，$Px = u$ とおくと，P は E から $A^{-1}0$ の上への最短距離の点を与える写像である.

参考文献

[1] F. E. Browder, *Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach space,* Archs. Ratio. Anal. **24** (1967), 82-90.

[2] J. Diestel, *Geometry of Banach spaces, Selected Topics,* Lecture Notes in Mathematics 485, Springer, Berlin, 1975.

[3] O. Güler, *On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization,* SIAM J. Control Optim. **29** (1991), 403-419.

[4] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps,* Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957-961.

[5] S. Kamimura and W. Takahashi, *Approximating solutions of maximal monotone operators in Hilbert spaces,* J. Approximation Theory, to appear.

[6] S. Kamimura and W. Takahashi, *Convergence theorems for resolvents of accretive operators in Bananch spaces,* Set-Valued Analysis, to appear.

[7] K. Kido, *Strong convergence of resolvents of monotone operators in Banach spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 755-758.

[8] S. Kitahara and W. Takahashi, *Image recovery by convex combinations of sunny nonexpansive retractions,* Topol. Methods Nonlinear Analysis, **2** (1993), 333-342.

[9] W. R. Mann, *Mean value methods in iteration,* Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 506-510.

[10] B. Martinet, *Regularisation, d'inèquations variationelles par approximations succesives,* Revue Francaise d'Informatique et de Recherche Operationelle, 1970, 154-159.

[11] J. J. Moreau, *Proximité et dualité dans un espace Hilbertien,* Bull. Soc. Math. France **93** (1965), 273-299.

[12] S. Reich, *Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces,* J. Math. Anal. Appl. **67** (1979), 274-276.

[13] S. Reich, *Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces,* J. Math. Anal. Appl. **75** (1980), 287-292.

[14] R. T. Rockafellar, *Monotone operators and the proximal point algorithm,* SIAM J. Control Optim. **14** (1976), 877-898.

[15] J. Schu, *Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings,* Bull. Austral. Math. Soc. **43** (1991), 153-159.

[16] N. Shioji and W. Takahashi, *Strong convergence of approximated sequence for nonexpansive mappings in Banach spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3641-3645.

[17] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for an amenable semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 253-256.

[18] W. Takahashi, *Fixed point theorems for families of nonexpansive mappings on unbounded sets,* J. Math. Soc. Japan **36** (1984), 543-553.

[19] W. Takahashi, *A nonlinear ergodic theorem for a reversible semigroup of nonexpansive mappings in a Hilbert space,* Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 55-58.

[20] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis (Japanese),* Kindaikagakusha, Tokyo, 1988.

[21] W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonexpansive semigroups without convexity,* Can. J. Math. **44** (1992), 880-887.

[22] W. Takahashi, *Fixed point theorems and nonlinear ergodic theorems for nonlinear semigroups and their applications,* Nonlinear Analysis **30** (1997), 1283-1293.

[23] W. Takahashi, *Fan's existence theorem for inequalities concerning convex functions and its applications,* in Minimax Theory and Applications (S. Simons and B. Ricceri, Eds.), Kluwer Academic Publishers, 1998, 241-260.

[24] W. Takahashi, *Convex Analysis and Approximation of Fixed Points (Japanese),* Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.

[25] W. Takahashi and G. E. Kim, *Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces,* Math. Japonica **48** (1998), 1-9.

[26] W. Takahashi and K. Shimoji, *Convergence theorems for nonexpansive mappings and feasibility problems,* Mathematical and Computer Modelling, to appear.

[27] W. Takahashi and T. Tamura, *Limit theorems of operators by convex combinations of nonexpansive retractions in Banach spaces,* J. Approximation Theory **91** (1997), 368-397.

[28] W. Takahashi and T. Tamura, *Convergence theorems for a pair of nonexpansive mappings,* J. Convex Analysis **5** (1998), 45-56.

[29] W. Takahashi and Y. Ueda, *On Reich's strong convergence theorems for resolvents of accretive operators,* J. Math. Anal. Appl. **104** (1984), 546-553.

[30] R. Wittmann, *Approximation of fixed points of nonexpansive mappings,* Arch. Math. **58** (1992), 486-491.